8-6-18

Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Buenos Aires Examen Final de Probabilidad y Estadística -8 de junio de 2018

Apellido y Nombre: ....
Legajo: ....

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Teórico 1	Teórico 2	Nota

La condición mínima de aprobación es de tres puntos correctos. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Ejercicio 1 *Dada la variable aleatoria X: porcentaje de combustible vendido en el fin de semana, cuya densidad está dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

1. Hallar los valores de a y b de modo tal que $E(x) = 0.6$.
2. Hallar la expresión de la función de distribución.

Ejercicio 2 *Una compañía tabacalera sostiene que el contenido ~~medio~~ de nicotina de sus cigarrillos es una variable aleatoria normal con media $\mu = 2.5mg$ y desviación standard $\sigma = 0.4mg$. Sin embargo una muestra aleatoria de 16 cigarrillos de esta compañía arrojó una media de nicotina de 2.8 mg.*

a. *¿Cuál es la probabilidad de que, siendo cierta la afirmación de la compañía, el promedio muestral resulte igual o superior a 2.8 mg?.*

b. *¿Cómo varía esta probabilidad si la muestra fuera de 36 cigarrillos.*

Ejercicio 3 *En el control de calidad de un producto se desea estimar la superficie de la hoja(cm^2) conociendo el peso(g) de la misma. Se dispone de los siguientes datos:*

SUPHOJA	*44.09*	*36.67*	*51.72*	*36.04*	*38.97*	*41.28*	*52.06*	*53.33*	*50.01*
PESOF	*49.29*	*49*	*43.04*	*66.79*	*63.11*	*53.8*	*39.63*	*44.98*	*40.77*

- *Hallar un modelo para realizar esta estimación.*
- *Testear la adecuación del modelo al 5% de significación.*

Ejercicio 4 *Se supone que el sexo del individuo puede influir en la presentación de incontinencia urinaria por causa de largas internaciones. Para comprobarlo se tomaron dos muestras de 90 hombres y 100 mujeres, encontrándose que 19 de los primeros y 39 de las segundas sufrían de incontinencia tras un mismo tiempo de hospitalización. a- ¿Qué prueba utilizaría para estudiar si la incontinencia y el sexo están asociadas? Establecer las hipótesis de interés, especificar el estadístico de contraste, su distribución y la región crítica al 1%. b- Decidir y concluir en términos del problema.*

Teórico 1 *Si f y g son dos funciones de densidad, demostrar que $h = \alpha f + (1 - \alpha)g$, con $\alpha > 0$ también e una función de densidad de probabilidad. Cuál sería el valor esperado de h?.*

Teórico 2 *Sean A y B dos eventos de un mismo espacio muestral tales que $0 < P(A) < 1$ y $0 < P(B) <$ responder y justificar la respuesta:*

- *Si A y B son disjuntos, pueden también ser independientes.*
- *Si $A \subset B$, A y B no pueden ser independientes.*

PyE

8-6-18

$\boxed{\text{EJ 1}}$

Dada la r.a. X: porcentaje de combustible vendido en el fin de semana, cuya densidad está dado por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+b & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

1) hallar los valores de a y b de modo tal que $E(X) = 0.6$

- $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \int_0^1 x(ax^2+b)\, dx = \int_0^1 ax^3 + bx\, dx =$

$$= \frac{ax^4}{4} + \frac{bx^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} = 0.6 = \frac{a+2b}{4}$$

$$\rightarrow a+2b = 2{,}40$$

- $1 = \int_0^1 ax^2+b\, dx = \frac{ax^3}{3} + bx\Big|_0^1 = \frac{a}{3} + b \rightarrow \boxed{b = 1-\frac{a}{3}}$

$$\rightarrow a+2b = a+2\left(1-\frac{a}{3}\right) = a+2-\frac{2}{3}a = \frac{a}{3}+2 = 2{,}40$$

$$\frac{a}{3} = 0{,}40 \longrightarrow \boxed{a = 1{,}2} \rightarrow \boxed{b = 0.6}$$

2) Hallar la expresión de la función de distribución

$$f(x) = \begin{cases} 1{,}2x^2 + 0.6 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

- si $x < 0 \rightarrow F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\, dx = 0$

- si $0 \leq x \leq 1 \rightarrow F(t) = 0 + \int_0^t 1{,}2x^2 + 0.6\, dx = 0.4x^3 + 0.6x\Big|_0^t = 0.4t^3 + 0.6t$

- si $x > 1 \rightarrow F(t) = 0 + 0{,}4 + 0.6 = 1$

$$\boxed{F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 0.4t^3 + 0.6t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}}$$

Ej 2

Una compañía tabacalera sostiene que el contenido medio de nicotina de sus cigarrillos es una v.a. normal con media $\mu = 2{,}5$ mg y desviación estándar $\sigma = 0{,}4$ mg. Sin embargo una muestra aleatoria de 16 cigarrillos de esta compañía arrojó una media de nicotina de 2,8 mg.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, siendo cierta la afirmación de la compañía, el promedio muestral resulte igual o superior a 2,8 mg?

En el examen dijeron que este ejercicio está mal redactado

Se pidió saber la probab. de que $\bar{X}$ sea 2,8 con una muestra de $n = 16$

$X \sim N(2{,}5\,,\, 0.4) \quad n=16 \quad \rightarrow \bar{X} \sim N(2.5\,,\, 0.4/\sqrt{16}) \rightarrow \bar{X} \sim N(2{,}5, 0{,}1)$

$$\rightarrow P(\bar{X} \geq 2{,}8) = P\Bigg(\underbrace{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}_{\sim Z(0,1)} \geq \frac{2{,}8-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\Bigg) = P\left(Z \geq \frac{2{,}8-2{,}5}{0{,}10}\right) = 1 - P(Z < 3) =$$

$$\overset{\text{cont.}}{=} 1 - P(Z \leq 3) = 1 - 0{,}99865 \rightarrow \boxed{P(\bar{X} \geq 2{,}8) = 0{,}0014}$$

b) ¿Cómo varía esta prob. si la muestra fuera de 36 cigarrillos?

Con $n=36 \rightarrow \bar{X} \sim N(2{,}5, 0{,}4/\sqrt{36}) \longrightarrow \bar{X} \sim N(2.5, 0{,}067)$

$$P(\bar{X} \geq 2{,}8) = P\Bigg(\overbrace{\frac{\bar{X}-2.5}{0{,}4/6}}^{\sim Z(0,1)} \geq \frac{2{,}8-2{,}5}{0{,}4/6}\Bigg) = P(Z \geq 4{,}5) = 1 - P(Z < 4{,}5) =$$

$$\overset{\times \text{cont.}}{=} 1 - \underbrace{P(Z \leq 4{,}5)}_{1} = 0$$

Con $n = 36$ la probabilidad es 0
→ con n más grande, la prob. disminuye

PyE 8-6-18

③ En el control de calidad de un producto se desea estimar la superficie de la hoja (cm^2) conociendo el peso (g) de la misma. Se dispone de los sig. datos:

Y	Sup. hoja	44,09	36,67	51,72	36,04	38,97	41,28	52,06	53,33	50,01
X	Peso	49,29	49	43,04	66,79	63,11	53,8	39,63	44,98	40,77

- Hallar un modelo para realizar esta estimación

Y: sup. de la hoja, X: peso de la hoja $\Big\}$ $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon \rightarrow \hat{Y} = b_0 + b_1 x$

x calculadora: $b_0 = 75,063$ $\quad b_1 = -0,602$

$$\boxed{\hat{Y} = 75,06 + 0,60\, X}$$

- testear la adecuación del modelo al 5% de significación

$$H_0: \beta_1 = 0 \quad vs \quad H_1\ \beta_1 \neq 0$$

$\alpha = 0{.}05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{.}025$ $\quad T = \frac{b_1}{S/\sqrt{S_{xx}}} \sim t_{m-2}$ bajo H_0

$m = 9$

$b_1 = -0,602$ $\quad$ Rechazo Ho si $|T_{obs}| > t_{m-2, \frac{\alpha}{2}}$

$$S^2 = \left(S_{yy} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}\right)\frac{1}{m-2}$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{m} y_i^2 - \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} y_i\right)^2 = 18540,4889 - \frac{1}{9}\cdot 404,17^2 = \boxed{390,11 = S_{yy}}$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{m} y_i\right) = 19802,88 - \frac{1}{9}\cdot 404,17 \cdot 450,77 = \boxed{-440,20 = S_{xy}}$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 - \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2 = 23308,21 - \frac{1}{9}\cdot 450,77^2 = \boxed{731,14 = S_{xx}}$$

$\sqrt{S_{xx}} = 27,04$

$$S^2 = \left(390,11 - \frac{(-440,20)^2}{731,14}\right)\cdot\frac{1}{7} = 17,85 \rightarrow \boxed{S = 4,22}$$

$$T_{obs} = \frac{-0,602}{4,22/27,04} = -3,85$$

$$t_{m-2, \frac{\alpha}{2}} = t_{7, 0.025} = 2,365$$

$\Big\}$ $|t_{obs}| > t_{7, 0.025}$ $\therefore$ $\boxed{\text{Rechazo Ho}}$

Ej 4

Se supone que el sexo del individuo puede influir en la presentación de incontinencia urinaria por causa de largas internaciones. Para comprobarlo se tomaron dos muestras de 90 hombres y 100 mujeres, encontrándose que 19 de los primeros y 39 de los segundos sufrían de incontinencia tras un mismo tiempo de hospitalización.

a) ¿Que prueba utilizaría para estudiar si la incontinencia y el sexo están asociados? Establecer las hipótesis de interés, especificar el estadístico de contraste, su distribución y la región crítica al 1%

$n_H = 90 \qquad \bar{X}_H = 19/90 \xrightarrow{\hat{p}_H = \bar{X}_H} \hat{p}_H = 0.21$

$n_M = 100 \qquad \bar{X}_M = 39/100 \xrightarrow{\hat{p}_M = \bar{X}_M} \hat{p}_M = 0.39$

$\alpha = 0{,}01 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995$

$$\boxed{H_0: \; p_H = p_M \quad vs \quad H_1: \; p_H \neq p_M}$$

$$e_m = \frac{(\hat{p}_M - \hat{p}_H) - 0}{\sqrt{\hat{p}_c(1-\hat{p}_c)\left(\frac{1}{n_H} + \frac{1}{n_M}\right)}} \sim e_m = \frac{\hat{p}_M - \hat{p}_H}{\sqrt{0.305 \times 0.695\left(\frac{1}{90} + \frac{1}{100}\right)}}$$

$$\hat{p}_c = \frac{\Sigma X_H + \Sigma X_M}{n_H + n_M} = \frac{19+39}{90+100} = 0{,}305$$

$$\boxed{e_m = \frac{\hat{p}_M - \hat{p}_H}{0{,}067} \text{ bajo } H_0}$$

$$\boxed{\text{Rechazo } H_0 \text{ si } |z_{obs}| > z_{0.995}}$$

b) Decidir y concluir en términos del problema

$$\left.\begin{array}{l} z_{obs} = \dfrac{0{,}39 - 0{,}21}{0{,}067} = 2{,}687 \\ z_{0.995} = 2{,}575 \end{array}\right\} \begin{array}{l} |z_{obs}| > z_{0.995} \\ \therefore \text{Rechazo } H_0 \end{array}$$

> No hay elementos suficientes para decir que el sexo no influye en la presentación de incontinencia urinaria

PyE 8-6-18

$\boxed{\text{teórico 1}}$

Si f y g son dos funciones de densidad, demostrar que $h = \alpha f + (1-\alpha) g$ con $\alpha > 0$ también es una función de densidad de probabilidad. ¿Cuál sería el valor esperado de h?

f y g funciones de densidad $\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha f(x) + (1-\alpha) g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} (1-\alpha) g(x)\,dx =$$

$$= \alpha \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx}_{1} + (1-\alpha) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx}_{1} = \cancel{\alpha} + 1 - \cancel{\alpha} = 1$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx = 1}$$

X: v.a. con función de densidad $f(x)$; Y: v.a. con func. de densidad $g(x)$

$$E(H) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, h(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left[\alpha f(x) + (1-\alpha) g(x)\right] dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x \alpha f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} x (1-\alpha) g(x)\,dx = \alpha \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx}_{E(X)} + (1-\alpha) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x\, g(x)\,dx}_{E(Y)}$$

$$= \alpha E(X) + (1-\alpha) E(Y)$$

$$\boxed{E(H) = \alpha E(X) + (1-\alpha) E(Y)}$$

teórico 2

8
Sean A y B dos eventos de un mismo espacio muestral tales que $0 < P(A) < 1$ y $0 < P(B) < 1$, responder y justificar la respuesta.

- Si A y B son disjuntos pueden también ser independientes

A y B disjuntos $\rightarrow P(\underbrace{A \cap B}_{\emptyset}) = 0$ (hipótesis), $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$

tesis:

A y B independientes $\rightarrow P(A \cap B) = \overbrace{P(A)}^{\neq 0} . \overbrace{P(B)}^{\neq 0} \neq 0$ ∴ $\boxed{\text{es Falso}}$

- Si $A \subset B$, A y B no pueden ser independientes

$A \subset B \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)$ (hipótesis), $P(B) \neq 1$

tesis:

A y B indep $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) . \overbrace{P(B)}^{\neq 1} \neq P(A)$ $\boxed{\text{es Verdadero}}$